COMPOSITION D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

RAPPELS ET NOTATIONS

$\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) désigne le corps des nombres réels (resp. complexes). Si A et B sont des parties de $\mathbb{R}$, on note $A + B$ l'ensemble $\{ x + y \mid x \in A, y \in B \}$, $\mathring{A}$ (resp. $\overline{A}$) l'intérieur (resp. l'adhérence) de A; χ_A est la fonction caractéristique de A, égale à 1 (resp. 0) sur A (resp. $\mathbb{R} - A$).

On note C_0 l'espace vectoriel des applications continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

On munit C_0 de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)| \mid x \in \mathbb{R} \}$.

$\mathcal{M}$ (resp. $\mathfrak{T}$) désignera l'ensemble des mesures de Radon complexes (resp. *positives non nulles*) de masse totale finie sur $\mathbb{R}$. On rappelle que l'application qui à un élément μ de $\mathcal{M}$ fait correspondre la forme linéaire :

$$f \longmapsto \mu(f) = \int f(x)\, d\mu(x)$$

identifie $\mathcal{M}$ à l'ensemble des formes linéaires continues sur C_0. On munit $\mathcal{M}$ de la norme duale $\|\mu\| = \sup \{ |\mu(f)| \mid \|f\|_\infty = 1 \}$. En particulier, pour $a \in \mathbb{R}$, δ_a désignera la mesure associée à la forme linéaire $f \longmapsto f(a)$.

Si μ est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$, g une fonction μ-intégrable, on notera $g \cdot \mu$ la mesure de densité g par rapport à μ. Soit $\mu \in \mathcal{M}$, on désignera par $|\mu|$ l'unique mesure positive telle que $\mu = g \cdot |\mu|$, où $|g(x)| = 1$ pour tout x. Le support de μ est l'ensemble $S(\mu)$ des réels x tels que pour tout voisinage ouvert V de x l'on ait $|\mu|(V) > 0$. L'ensemble des éléments de $\mathcal{M}$ (resp. $\mathfrak{T}$) à support contenu dans une partie A de $\mathbb{R}$ sera noté $\mathcal{M}(A)$ (resp. $\mathfrak{T}(A)$). On rappelle que $\mathcal{M}(\{a\}) = \mathbb{C} \cdot \delta_a$.

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est notée λ ; L^1 désigne l'ensemble des classes de fonctions λ-intégrables, γ la fonction $x \longmapsto e^{-x^2/2}$. Pour $f \in L^1$, $\|f\|_1$ désigne le réel $\|f \cdot \lambda\|$. On rappelle que $\|\gamma\|_1 = \sqrt{2\pi}$.

Soit $(E, *)$ un monoïde abélien, *i.e.* un ensemble muni d'une loi de composition $*$, commutative, associative et possédant un élément neutre e. Si a, b, c sont des éléments de E tels que $a = b * c$, on dira que b divise a. Un élément qui divise e est dit inversible. Si $a = b * u$, où u est inversible, on dit que a et b sont associés.

Une partie F de E est primaire si tout diviseur d'un élément de F est soit inversible, soit associé à un élément de F. Un élément a de E est irréductible si le singleton $\{a\}$ est une partie primaire de E. On rappelle enfin qu'un élément a de E est dit régulier si l'application $x \longmapsto a * x$ est injective sur E.

Les trois premières questions de chacune des parties I *et* II *sont consacrées à des résultats préliminaires. Il est demandé aux candidats d'y répondre de manière précise, en justifiant notamment l'interversion des intégrations à l'aide des théorèmes du programme.*

Les parties III *et* IV *sont indépendantes.*

I

1° *a*. Soient μ et ν deux éléments de $\mathfrak{M}$, prouver que l'intégrale :

$$(\mu * \nu)(f) = \int \left(\int f(x+y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

a un sens pour tout élément f de C_0, et que l'on définit ainsi un élément $\mu * \nu$ de $\mathfrak{M}$ vérifiant $\| \mu * \nu \| \leqslant \| \mu \| . \| \nu \|$.

Montrer que la loi de composition $*$ munit $\mathfrak{M}$ d'une structure d'algèbre commutative et associative, admettant pour unité δ_0. Vérifier que $(\mathfrak{L}, *)$ est un sous-monoïde de $(\mathfrak{M}, *)$.

b. Soient ν un élément de $\mathfrak{M}$, f un élément de L^1 ; établir que $\nu * (f . \lambda) = g . \lambda$, où g est l'élément de L^1 défini pour λ - presque tout x par la formule :

$$g(x) = \int f(x-y)\, d\nu(y)$$

et qu'on notera $g = \nu * f$.

2° Soient μ et ν deux éléments de $\mathfrak{M}$. Prouver l'inclusion $S(\mu * \nu) \subset \overline{S(\mu) + S(\nu)}$. Donner un exemple où l'on n'a pas $S(\mu * \nu) \subset S(\mu) + S(\nu)$.

3° Soient μ et ν deux éléments de $\mathfrak{L}$. Établir l'inclusion : $S(\mu) + S(\nu) \subset S(\mu * \nu)$. Quels sont les éléments inversibles du monoïde $(\mathfrak{L}, *)$?

4° Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, B l'ensemble des couples (x, y) d'éléments de A tels que $x < y$.

a. Montrer que $\mathfrak{L}(A)$ est une partie primaire de $(\mathfrak{L}, *)$.

b. Prouver que, pour que tout élément de $\mathfrak{L}(A)$ soit irréductible dans $\mathfrak{L}$ il faut et il suffit que l'application $(x, y) \longmapsto y - x$ soit injective sur B.

5° *a*. Soit P le polynôme $P = \sum_{i=0}^{i=n-1} X^i$. On suppose qu'il existe des polynômes *unitaires et à coefficients positifs ou nuls* $A = X^p + \sum_{j=0}^{j=p-1} a_j X^j$ et $B = X^q + \sum_{k=0}^{k=q-1} b_k X^k$ tels que $P = A . B$.

Montrer que les coefficients a_j et b_k de A et B ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1.

b. Pour tout entier naturel strictement positif n on pose $\mu_n = \delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_{n-1}$. Établir que μ_n est irréductible dans $\mathfrak{L}$ si, et seulement si, n est premier.

c. Donner un exemple d'une famille $(\nu_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ d'éléments irréductibles de $\mathfrak{L}$, deux à deux non associés, et telle que l'on ait $\nu_1 * \nu_2 = \nu_3 * \nu_4$.

6° *a*. Montrer que l'ensemble des éléments non irréductibles de $\mathfrak{L}$ est dense dans $\mathfrak{L}$.

b. Prouver qu'il en est de même pour l'ensemble des éléments irréductibles. (On pourra, pour approcher une mesure μ, se ramener au cas où μ est à support compact et considérer les mesures $\mu + \frac{1}{n} \delta_n$.)

II

Pour tout nombre réel strictement positif h on notera γ_h la fonction définie par $\gamma_h(x) = \frac{1}{h}\gamma\left(\frac{x}{h}\right)$.

1° Soit μ un élément de $\mathfrak{M}$ tel que pour tout $h > 0$ l'on ait $\mu * \gamma_h = 0$. Montrer, par exemple à l'aide d'une version du théorème de Stone-Weierstrass, que $\mu = 0$.

2° *a.* Pour tout $\mu \in \mathfrak{M}$ et tout nombre réel t on pose :

$$\hat{\mu}(t) = \int e^{-itx}\, d\mu(x) \tag{1}$$

Prouver que cette intégrale converge et définit une fonction $\hat{\mu}$ uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Si $f \in L^1$ on notera $\hat{f}$ la fonction $\widehat{(f.\lambda)}$.

Vérifier que pour tout couple (μ, ν) d'éléments de $\mathfrak{M}$ l'on a les relations $\widehat{(\mu * \nu)}(t) = \hat{\mu}(t) . \hat{\nu}(t)$ et $\int \hat{\nu}(t)\, d\mu(t) = \int \hat{\mu}(t)\, d\nu(t)$.

b. Montrer que l'intégrale $F(z) = \int e^{zx}\gamma(x)\, d\lambda(x)$ converge pour tout nombre complexe z et définit une fonction F holomorphe sur $\mathbb{C}$. En déduire l'expression de $\hat{\gamma}$.

3° *a.* Soient $\mu \in \mathfrak{M}$, $h > 0$; établir que pour presque tout nombre réel x l'on a (cf. I, 1° *b*) :

$$\mu * \gamma_h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{h^2 t^2}{2} + itx}\, \hat{\mu}(t)\, d\lambda(t)$$

b. En déduire que l'application $\mu \longmapsto \hat{\mu}$ est injective et que la relation $\mu * \gamma = 0$ implique $\mu = 0$.

c. Soit μ un élément de $\mathfrak{M}$ tel que $\hat{\mu} \in L^1$. Prouver que $\mu = g.\lambda$, où $g(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{itx}\, \hat{\mu}(t)\, d\lambda(t)$. En déduire que pour toute application ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, deux fois continûment dérivable et à support compact, il existe un élément μ de $\mathfrak{M}$ tel que $\hat{\mu} = \psi$.

4° Pour $\mu \in \mathfrak{M}$ on pose $Z(\mu) = \{ t \in \mathbb{R} \mid \hat{\mu}(t) = 0 \}$.
Caractériser, à l'aide de $Z(\mu)$, les éléments réguliers des monoïdes $(\mathfrak{M}, *)$ et $(\mathfrak{L}, *)$.

5° *a.* Soit μ un élément de $\mathfrak{L}$, montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) La fonction $\dfrac{\hat{\mu}(t) + \hat{\mu}(-t) - 2\hat{\mu}(0)}{t^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}^*$.

(ii) $\int x^2\, d\mu(x) < +\infty$

(iii) $\hat{\mu}$ est de classe C^2.

b. Soient μ et ν deux éléments de $\mathfrak{L}$ tels que μ divise ν et ν divise μ dans $\mathfrak{L}$. Prouver que μ et ν sont associées dans $\mathfrak{L}$.

6° *a.* Soient μ un élément de $\mathfrak{M}$, T un réel strictement positif, montrer qu'il est équivalent de dire :

(i) $\hat{\mu}$ est T-périodique

(ii) $\mu \in \mathfrak{M}\left(\frac{2\pi}{T} . \mathbb{Z}\right)$.

Dans ces conditions, quelle est la série de Fourier de $\hat{\mu}$?

b. Vérifier qu'il existe un élément ν_0 de $\mathfrak{L}(\mathbb{Z})$ tel que $\hat{\nu}_0(t) = 1 - \frac{2|t|}{\pi}$ pour $|t| \leqslant \pi$.

c. Application :

Soit a un nombre réel strictement positif. Montrer qu'il existe un élément ν_1 de $\mathcal{M}$ tel que $\| \nu_1 \| = a$ et que $\hat{\nu}_1 (t) = t$ pour $| t | \leqslant a$. Soit μ un élément de $\mathcal{M}([-a, a])$, établir que $\hat{\mu}$ est dérivable et que l'on a l'inégalité $\| (\hat{\mu})' \|_\infty \leqslant a \| \hat{\mu} \|_\infty$.

Soit P un polynôme de degré n à coefficients complexes, prouver l'inégalité :

$$\sup \{ | P'(z) | \,\big|\, | z | \leqslant 1 \} \leqslant n . \sup \{ | P(z) | \,\big|\, | z | \leqslant 1 \}.$$

III

1° Soit μ un élément de $\mathcal{P}$, R un nombre réel strictement positif; on suppose que la fonction $\hat{\mu}$ se prolonge en une fonction analytique dans le disque $D_R = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, | z | < R \}$.

a. Soit $r \in]0, R[$, montrer que la suite $n \longmapsto \dfrac{r^{2n}}{(2n)!} \displaystyle\int x^{2n} \, d\mu(x)$ est bornée. (On pourra s'inspirer du II. 5° *a.*)

b. En déduire que la suite $n \longmapsto \dfrac{r^n}{n!} \displaystyle\int | x |^n \, d\mu(x)$ est bornée et que la fonction $x \longmapsto e^{mx}$ est μ-intégrable pour tout $m \in]-R, R[$.

2° Pour tout élément μ de $\mathcal{P}$ on note J_μ l'ensemble des réels m tels que la fonction $x \longmapsto e^{mx}$ soit μ-intégrable.

a. Montrer que J_μ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que pour tout couple (μ, ν) d'éléments de $\mathcal{P}$ l'on a $J_{\mu * \nu} = J_\mu \cap J_\nu$.

b. On suppose $\mathring{J}_\mu$ non vide et on note B_μ la bande $B_\mu = \{ t = u + iv \in \mathbb{C} \,|\, v \in \mathring{J}_\mu \}$, $B'_\mu = B_\mu \cup \mathbb{R}$. Établir que la formule (1) du II. 2° définit une fonction de la variable complexe t, continue sur B'_μ et holomorphe dans B_μ, que l'on notera encore $\hat{\mu}$.

3° *a.* Dans les hypothèses précédentes, prouver que pour tout $v \in J_\mu$ et tout nombre réel u l'on a

$$| \hat{\mu}(u + iv) | \leqslant | \hat{\mu}(iv) | \tag{2}$$

b. En déduire que la fonction d'une variable réelle $\psi(v) = \text{Log}\, \hat{\mu}(iv)$ est convexe sur l'intervalle J_μ.

c. Pour tout nombre réel k supérieur ou égal à un, on désigne par $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des éléments μ de $\mathcal{P}$ tels que $J_\mu = \mathbb{R}$ et que la fonction $v \longmapsto (1 + | v |)^{-k} \psi_\mu(v)$ soit bornée sur $\mathbb{R}$. Prouver que $\mathcal{P}_k$ est une partie stable et primaire de $\mathcal{P}$.

4° *a.* Soit f une fonction holomorphe dans D_R et telle que $f(0) = 0$; on suppose qu'il existe une constante strictement positive A telle que pour tout $z \in D_R$ l'on ait $Re(f(z)) \leqslant A$; prouver alors l'inégalité :

$$\forall z \in D_R, \quad | f(z) | \leqslant \frac{2A | z |}{R - | z |} \quad \left(\text{on pourra considérer la fonction } g(z) = \frac{f(z)}{2A - f(z)} \right).$$

Dans le cas où f est en outre une fonction entière, en déduire l'inégalité :

$$\sup \{ | f(z) | \,\big|\, | z | \leqslant R \} \leqslant 2 \sup \{ Re(f(z)) \,\big|\, | z | \leqslant 2R \}$$

b. Soient $k \geqslant 1$, μ un élément de $\mathcal{P}_k$, on suppose que la fonction $\hat{\mu}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Montrer que $\hat{\mu}(t) = e^{P(t)}$, où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à k.

En déduire que le degré de P est au plus égal à deux. (On pourra déterminer un équivalent de $P(i v e^{i\theta})$, quand v tend vers $+\infty$, et utiliser l'inégalité (2) avec un choix convenable de θ.) Que peut-on dire de μ si P est de degré un?

c. On pose $\nu_h = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \gamma_h . \lambda$. Montrer que l'ensemble $\{ \nu_h \,|\, h > 0 \}$ est une partie stable et primaire de $\mathcal{P}$.

5° *a.* Pour tout nombre réel strictement positif r on pose $\lambda_r = \chi_{[-r, r]} . \lambda$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le quotient r/s pour que λ_r et λ_s aient un diviseur commun non inversible dans $(\mathcal{P}, *)$.

b. Montrer que pour tout nombre réel m assez grand la mesure $\mu_m = \lambda_1 + \delta_m * \lambda_{\sqrt{2}}$ est irréductible dans $\mathcal{P}$.

IV

Le but de cette partie est de donner une condition suffisante de divisibilité dans $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$.

Montrer que $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{M}$. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{Z})$, on pose $a_k = \mu(\{k\})$; établir que $\|\mu\| = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{|k| \leqslant n} |a_k|$ et que $\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{|k| \leqslant n} a_k \,.\, \delta_k$, la convergence ayant lieu dans $\mathcal{M}$. Prouver enfin que si $|\mu(\{0\})| > \frac{1}{2} \|\mu\|$, μ est inversible dans $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$.

Pour tout nombre réel a tel que $0 < a < \pi$, on notera E_a l'ensemble des applications de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, nulles en dehors de l'intervalle $[-a, a]$. Si $f \in E_a$, on lui associe la fonction $\check{f}$ définie par :

$$\check{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int f(t)\, e^{itx}\, d\lambda(t)$$

a. Montrer que $\check{f}$ est définie, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, et que la suite $n \longmapsto \sum\limits_{|k| \leqslant n} \check{f}(k)\, \delta_k$ converge, lorsque n tend vers l'infini, vers un élément $\mu[f]$ de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$.

Calculer $\widehat{\mu[f]}$.

b. Soit a' un nombre réel tel que $a < a' < \pi$, φ un élément de $E_{a'}$, tel que pour tout $x \in [-a, a]$ l'on ait $\varphi(x) = 1$. Prouver que pour tout $f \in E_a$ l'on a : $\check{f} = \check{f} * (\check{\varphi} \,.\, \lambda)$.

En déduire qu'il existe une constante k_a, ne dépendant que de a, telle que pour tout élément f de E_a l'on ait l'inégalité $\|\mu[f]\| \leqslant k_a \|\check{f}\|_1$.

c. On se fixe un élément φ_1 de E_2 tel que $\varphi_1(x) = 1$ pour $|x| \leqslant 1$, et on pose,

pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad \varphi_n(x) = \varphi_1(nx) \quad$ et $\quad \nu_n = \mu[\varphi_n]$.

Montrer que la suite (ν_n) est bornée dans $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ et que,

pour tout entier relatif m, $\quad \|(\delta_m * \nu_n) - \nu_n\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

En déduire que pour tout élément μ de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$,

$$\|(\mu - \hat{\mu}(0)\,\delta_0) * \nu_n\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

d. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{Z})$, on suppose $\hat{\mu}(0) \neq 0$; prouver qu'il existe un élément inversible ν de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ tel que les fonctions $\hat{\mu}$ et $\hat{\nu}$ coïncident sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.

Soient $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{Z})$. Montrer que si $Z(\mu) \subset \overset{\circ}{\widehat{Z(\nu)}}$, alors μ divise ν dans $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$.

Caractériser les éléments inversibles de $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$.

ANALYSE : RAPPORT D'ECRIT

L'objet du problème était l'étude de quelques propriétés de factorisation, pour la convolution, des mesures bornées sur $\mathbb{R}$. Il s'inspirait des travaux de P. Lévy, H. Cramer, D.A. Raikov et D. Dugué, dans la première moitié de ce siècle.

La première partie avait pour thème le lien entre les propriétés de divisibilité d'une mesure et la géométrie de son support. On trouve l'essentiel des résultats dans (1) et (2).

La seconde partie était consacrée aux propriétés classiques de la transformation de Fourier. Les questions 4, 5 et 6 en étaient des applications directes.

La troisième partie concernait les mesures positives à transformée de Fourier analytique dans une bande. Elle débouchait sur le théorème de Cramer et sur un exemple de mesure irréductible absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Toutes ces propriétés sont données dans (1).

Enfin la quatrième partie, presque entièrement indépendante des précédentes, donnait une version du lemme de Wiener, en suivant d'assez près l'exposé qui en est fait dans (3).

Le sujet faisait constamment appel aux propriétés de l'intégrale de Lebesgue, du niveau de la maîtrise.

C'est dire que les candidats qui n'en avaient qu'une connaissance superficielle ont été lourdement pénalisés. Faut-il rappeler une fois de plus que le jury attend des candidats une familiarité suffisante avec le théorème de convergence dominée et le théorème de Fubini d'une part, avec la théorie élémentaire des fonctions holomorphes d'autre part.

Inversement ceux qui ont su répondre de manière correcte aux questions simples d'analyse classique des parties II et III ont eu une note convenable.

Les remarques qui suivent concernant les diverses questions du problème ne veulent pas en être un corrigé ; leur propos est critique, et elles s'étendent volontiers sur les questions traitées par le plus grand nombre, en délaissant celles qui n'ont été abordées, d'ailleurs souvent de manière satisfaisante, que par une minorité de candidats.

I.1.a) Les mesures produit réservant parfois des surprises, il convient de justifier la mesurabilité des fonctions auxquelles on applique le théorème de Fubini. D'autre part, l'anneau $\mathcal{M}$ n'étant pas intègre, il était nécessaire d'établir que le produit de convolution de deux mesures positives non nulles est non nul.

D'une manière générale, beaucoup de candidats ont semblé gênés par les mesures complexes, malgré le mode d'emploi ($\mu = g|\mu|$), fondé sur le théorème de Radon-Nikodym, qui en était donné dans l'introduction. C'est ainsi que souvent des preuves sont incorrectes faute de valeurs absolues.

b) Il ne fallait pas se contenter d'un calcul formel, et prendre soin d'établir la convergence pour presque tout x de l'intégrale définissant g.

2) Beaucoup de solutions confuses ont été données à cette question. Il était préférable de chercher d'abord le support de la mesure produit $\mu \otimes \nu$ puis de considérer le produit de convolution comme mesure image, en remarquant qu'il résulte du théorème de convergence dominée que si une fonction mesurable est nulle sur le support d'une mesure, elle est alors d'intégrale nulle.

Enfin, un contre-exemple ne pouvait être trouvé qu'avec des supports non bornés (la somme d'un compact et d'un fermé est toujours fermée).

5) Le but de cette question était de montrer que l'irréductibilité d'une mesure n'est pas nécessairement liée à l'irrégularité de son support.

Les candidats qui ont supposé a priori A et B à coefficients entiers ont obtenu des solutions rapides mais qui n'avaient, hélas, rien à voir avec l'énoncé. La clef de la solution était de remarquer que A et B ayant des racines deux à deux conjuguées et de module un, étaient réciproques. Supposant par exemple $p \leqq q$, on montrait alors, en considérant les termes de degré q, que pour $j > 0$, l'hypothèse $a_j > 0$ entraînait $b_j = 0$, puis par récurrence que $a_j + b_j = 1$ pour $j \leqq p$.

6) Cette question relativement facile n'a obtenu que peu de réponses.

II.1) Il fallait montrer que l'espace vectoriel E engendré par les fonctions γ_h et leurs translatées (γ est paire!) est dense dans C_o, ce qui pouvait se faire soit en établissant que $f*\gamma_h$ converge uniformément vers f quand h tend vers zéro, soit en appliquant le théorème de Stone-Weierstrass à l'espace compact $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Il était nécessaire dans ce cas de vérifier que les éléments de E ne s'annulent pas tous en un même point de $\mathbb{R}$.

2.a) Beaucoup de démonstrations de l'uniforme continuité de $\hat{\mu}$ ont été incorrectes. Il suffisait de remarquer l'inégalité :

$$\hat{\mu}(t+h) - \hat{\mu}(t) \leq \int |e^{ihx} - 1| d|\mu|(x)$$

et d'appliquer le théorème de convergence dominée.

b) Signalons entre autres erreurs que la fonction $e^{ax-x^2/2}$ n'est ni équivalente à $e^{-x^2/2}$ quand x tend vers l'infini ni majorée sur $\mathbb{R}$ par $e^{|a|x-x^2/2}$.

On attendait des candidats qu'ils déterminent l'expression de $F(z)$ par prolongement analytique à partir de son calcul, élémentaire par changement de variable, pour z réel. Les correcteurs ont regretté de trouver trop de "changements de variable" $x \to z+x$ ou de dérivations sous le signe intégral non justifiés.

3.a) Le jury s'est montré sévère pour cette vérification d'une formule donnée dans l'énoncé.

c) Il ne suffisait pas de vérifier que $\mu * \gamma = (g.\lambda) * \gamma$ car g n'est pas a priori intégrable. On pouvait tourner la difficulté en étudiant $(g.\gamma.\lambda) * \gamma$.

4) Trop peu de candidats ont vu que la condition cherchée était la vacuité non de $Z(\mu)$, mais de son intérieur.

5.a) L'implication difficile était i) $\Longrightarrow$ ii),iii), et reposait sur le lemme de Fatou. Rappelons qu'un développement limité n'a qu'une signification locale et que l'égalité $f(x) = g(x) + O(1)$ quand x tend vers zéro ne permet pas de déduire l'intégrabilité de f de celle de g, même par rapport à une mesure bornée!

6) Peu de candidats ont osé se lancer dans des calculs pourtant simples de coefficients de Fourier, qui leur auraient permis d'améliorer leur note.

III.1.a) Il fallait montrer par récurrence, en utilisant II.5.a) que

$$\hat{\mu}^{(2n)}(0) = (-1)^n \int x^{2n} d\mu(x)$$

et non se contenter de vagues allusions...

3.b) Il était commode d'utiliser le fait que Ψ est harmonique dans un voisinage de J_μ et atteint un maximum pour v réel.

Bibliographie

(1) D. Dugué, Arithmétique des lois de probabilité, Gauthier Villars, 1957.

(2) Linnik, Décompositions des lois de probabilité, Gauthier Villars, 1962.

(3) N. Wiener, The Fourier Integral and certain of its applications, Dover 1933.

Répartition des notes

0 à 4	500	30 à 34	20
5 à 9	158	35 à 39	21
10 à 14	129	40 à 44	13
15 à 19	48	45 à 49	7
20 à 24	20	50 à 54	4
25 à 29	24	55 à 60	8